

Data Structures and algorithms

Instructor : Dr.Amin Eskandari

Head-Ta's : Hamid Namjoo manesh , Amir Hossein Hemati , Ali Mojahed

Ta's : Amir Mohammad Asadjoo , Padina razmjooi , Armin Janfaza , Alireza Heydari , Mahdi Torabi ,

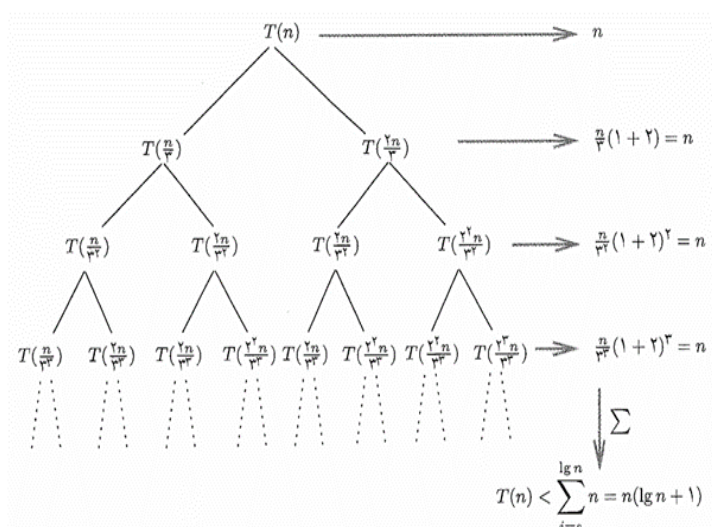
Maryam Ghorbani , Fatemeh Keshavarz , MohammadReza Fasli , Abolfazl Tadrissi

Week 02 Answers

پاسخنامه تکالیف هفته ۰۲

پاسخ سوال اول - تحلیل درخت بازگشتی:

پاسخنامه - تحلیل ساختاری درخت بازگشتی



رابطه داده شده :

$$T(n) = T(2n/3) + T(n/3) + n$$

$$T(1) = 1$$

سطح ۰ :

یک گره با اندازه n داریم.

هزینه این سطح برابر n است.

سطح ۱ :

دو زیر مسئله با اندازه های $n/3$ و $2n/3$ داریم.

مجموع اندازه ها:

$$2n/3 + n/3 = n$$

سطح ۲ :

هر گره به دو زیر مسئله به اندازه های $n/9$ و $2n/9$ و $2n/9$ و $4n/9$ تقسیم می شود.

$$4n/9 + 2n/9 + 2n/9 + n/9 = n$$

در نتیجه مجموع اندازه گره کل این سطح نیز برابر n خواهد شد.

الگوی کلی:

در هر سطح هر گره با اندازه های $x/3$ و $2x/3$ تقسیم می شود.

پس مجموع اندازه های هر سطح برابر n است.

نتیجه:

$$\text{Cost per level} = n$$

درخت بازگشت این رابطه به صورت غیر متوازن رشد می کند و عمق سمت چپ آن کمتر است و در عمق $\log_3 n$ به برگ $T(1)$ می رسد. اما عمق سمت راست درخت برابر $\log_{3/2} n$ است. مقدار ثابتی که از هر سطح $i \leq \log_3 n$ بدست می آید برابر n است ولی در سطح های بالاتر این مقدار کمتر می شود. بنابراین $T(n) = \theta(\log n)$ و در نتیجه $T(n) \leq n(\log n + 1)$

پاسخ سوال دوم - رابطه بازگشتی خارج از حالت های ساده :

رابطه داده شده:

$$T(n) = 2T(n/2) + n / \log n$$

پارامتر های Master:

$$a = 2$$

$$b = 2$$

$$f(n) = n / \log n$$

داریم:

$$n^{(\log_b a)} = n^{(\log_2 2)} = n$$

بنابراین با مقایسه $f(n) = n / \log n$ و n متوجه می شویم:

$f(n) = n / \log n$ از n کمی کوچک تر است اما از نوع $n^{(1 - \epsilon)}$ نیست بنابراین در هیچ یک از سه حالت استاندارد Master قرار نمی گیرد.

تحلیل با درخت بازگشتی:

در سطح i داریم:

$$\approx n / (\log n - i) \text{ هزینه سطح}$$

پس مجموع هزینه ها:

$$n * \sum_{j=1}^{\log n} (1/j)$$

و می دانیم:

$$\sum_{j=1}^m (1/j) = \Theta(\log m)$$

در اینجا $m = \log n$ ، بنابراین:

$$T(n) = \Theta(n \log \log n)$$

نتیجه نهایی:

$$T(n) \in \Theta(n \log \log n)$$

پاسخ سوال سوم - رشد توابع :

• برای چه a داریم $\Theta(\log n)$ ؟

اگر $a < 2$ باشد:

$$T(n) = \Theta(\log n)$$

• برای چه a رشد چند جمله ای $\log n$ می شود؟

اگر $a > 2$ باشد:

$$T(n) = \Theta((\log n)^{\log_2 a})$$

توجه:

در حالت $a=2$ داریم:

$$T(n) = \Theta(\log n \cdot \log \log n)$$

که تقریباً چند جمله ای است اما یک فاکتور $\log \log n$ اضافه دارد.

• آیا مقداری از a وجود دارد که رشد نمایی در $\log n$ ایجاد کند؟

نمایی در $\log n$ یعنی عباراتی مانند:

$$2^{(c \log n)} = n^c$$

اما برای هر مقدار ثابت a جواب یکی از حالت های زیر است:

$$\Theta(\log n)$$

$$\Theta(\log n \log \log n)$$

$$\Theta((\log n)^k)$$

هیچکدام از این ها نمایی در $\log n$ نیستند.

بنابراین:

خیر- برای هیچ مقدار ثابت a رشد نمایی در $\log n$ نداریم.

پاسخ سوال چهارم :

تغییر متغیر:

$$n = 2^m$$

$$S(m) = T(2^m)$$

چون:

$$n/2 = 2^{(m-1)}$$

پس رابطه تبدیل می شود به:

$$S(m) = 4S(m/2) + (2^m)^2 \cdot m$$

ساده سازی:

$$(2^m)^2 = 4^m$$

پس داریم:

$$S(m) = 4S(m/2) + m \cdot 4^m$$

تحلیل رابطه جدید:

$$a = 4$$

$$b = 2$$

پس:

$$m^{(\log_2 4)} = m^2$$

اما:

$$f(m) = m \cdot 4^m$$

که m^2 که تابعی نمایی است بسیار بزرگتر از m می باشد

با برقرار بودن (Master regularity) طبق حالت سوم قضیه:

$$S(m) = \theta(m \cdot 4^m)$$

میدانیم:

$$4^m = (2^m)^2 = n^2$$

$$m = \log n$$

پس نتیجه نهایی:

$$T(n) = \Theta(n^2 \log n)$$

پاسخ سوال پنجم :

گام اول - ساده سازی توابع

- $f_4(n) = 2^{\log n} = n$
- $f_2(n) = (\log n)^{\log n} = 2^{\{(\log n)(\log \log n)\}}$
- $f_8(n) = n^{\log n} = 2^{\{(\log n)^2\}}$
- $f_7(n) = 2^{\{(\log n)^2\}} = n^{\log n} \rightarrow$ بنابراین $f_7(n) = f_8(n)$

گام دوم - مقایسه رشد ها

- 1) $\log n < \log n \log \log n < n < n \log \log n < n \log n$
- 2) $n \log n < (\log n)^{\log n}$
- 3) $(\log n)^{\log n} < n^{\log n}$
- 4) $n^{\log n} = 2^{\{(\log n)^2\}} < (n/2)! \cdot 2^n < n!$

گام سوم - ترتیب نهایی از کوچکترین تا بزرگترین

$$f_4(n) < f_1(n) < f_3(n) < f_2(n) < f_7(n) = f_8(n) < f_6(n) < f_5(n)$$

نتیجه نهایی

ترتیب رشد توابع به صورت بالا است و تنها توابع هم مرتبه $f_7(n)$ و $f_8(n)$ هستند زیرا هر دو برابر با :

$$2^{\{(\log n)^2\}} \text{ می باشند}$$